تمارين المراجعة والتقويم السنة الدراسية 2014-2015 للأستاذ بختي ع ر

لجميع استفساراتكم وملاحظاتكم اتصل على العنوان التالي: bekhtimath@yahoo.fr

(1)النهايات-الاستمرارية

التمرين (1)

أحسب النهايات التالية ثم فسر النتيجة هندسيا في كل حالة مما ياتي

1	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+x-x^2}{1+x-2x^2}$	6	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-1}{\sqrt{x^2-x}}$
2	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x^3}{2+x^2}$	7	$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3	$\lim\limits_{\substack{x\to3\\ >}}\dfrac{2x-1}{x^2-9}$	8	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x+1}{x^2-1}$
4	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3}}{1+x-2x^2}$	9	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3}}{1+x-2x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2+x-x^2}{1+x-2x^2}$	10	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{2x-4}}$

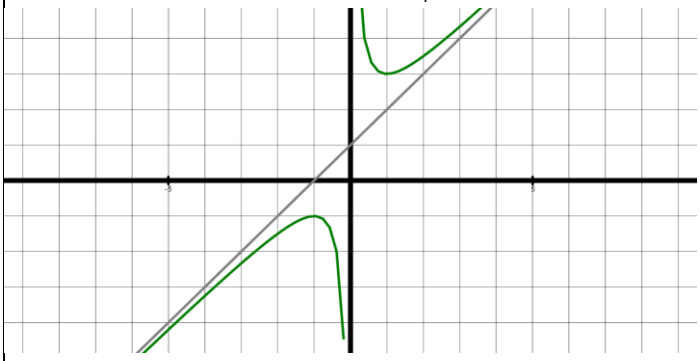
التمرين (2)

المنحني C_f هو التمثيل البياني للدالة f (أنظر الوثيقة المرفقة)

1)عين D مجموعة تعريف الدالة f .

2) خمّن النهايات في أطراف المجموعة D .

3)عين المستقيمات المقاربة لـ C_f حالة وجودها مبينا نوعها ومعادلاتها.



التمرين (3)

أحسب النهايات التالية

1	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-x-x^3}{1+x-2x^2}$	4	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
2	$\lim\limits_{x\to0}x\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}-2\right)$	5	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2x-1}{x^2}$
3	$\lim\limits_{\substack{x\to3\\ >}}\dfrac{\sqrt{2x-6}}{-x^2+9}$	6	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x+1}{x^2-1}$

التمرين (4)

f دالة معرفة على IR بـ: $f(x)=\dfrac{2}{2-\cos x}$.

1) برهن أن: $\dfrac{1}{3}\le f(x)\le1$ من أجل $x\in IR$

2)استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(2-\cos x)}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2(2-\cos x)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{2-\cos x}$.

التمرين (5)

f دالة معرفة على IR بـ: $f(x)=3x+2\sin x$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) g الدالة المعرفة على IR بـ: $\begin{cases}g(x)=\dfrac{x}{f(x)},x\neq0\\ g(0)=\dfrac{1}{5}\end{cases}$.

أ)برهن أن g مستمرة عند 0 .

ب) برهن أن: $\dfrac{x}{3x+2}\le g(x)\le\dfrac{x}{3x-2}$ من أجل $x\in\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$

جـ) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

التمرين (6)

f الدالة المعرفة على IR بـ:

$$\begin{cases}f(x)=x^2-1;x\ge0\\ f(x)=-\dfrac{\sin2x}{x}+2x+a;x\prec0\end{cases}$$

عين a بحيث تكون f مستمرة على IR .

التمرين (7)

عين الإجابة(الإجابات) الصحيحة فيما يلي

		أ	ب	ج	د
1	على المجال $]0;+\infty[$ المعادلة $x-1+\sqrt{x}=0$	تقبل حلا وحيدا	تقبل حلا على الأقل	ليس لها حل	تقبل حلين
2	المعادلة $x^3-3x^2=k$ تقبل حلا وحيدا في R من أجل	$k=2$	$k=0$	$k=-10$	$k=-4$

التمرين (8)

لتكن الدالة f المعرفة على IR بجدول تغيراتها التالي:

1) عين النهايات عند أطراف مجالات التعريف واستنتج وجود مقارب لمنحنى f

2) g الدالة المعرفة بـ: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

أ) بين أن معرفة على IR .

ب) عين النهايات عند أطراف مجالات التعريف واستنتج وجود مقاربات لمنحنى g .

التمرين (9)

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{-3x^2}{x^2-2x+5}$

1) تحقق من أن f معرفة على IR

2) برهن أن المستقيم ذو المعادلة $y=3$ مقارب لمنحنى f في الجوارين.

3) أعد وأكمل جدول التغيرات التالي:

التمرين (10)

f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\sqrt{x}$

1) بين أن الدالة f مستمرة على $[0;+\infty[$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3) احسب $f(3)$ و $f(4)$ و استنتج أن المعادلة $f(x)=5$ تقبل حلا وحيدا α .

4) باستعمال حاسبة ، أعط حصراً لـ α سعته $\dfrac{1}{10}$.

التمرين (11)

يعطى جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

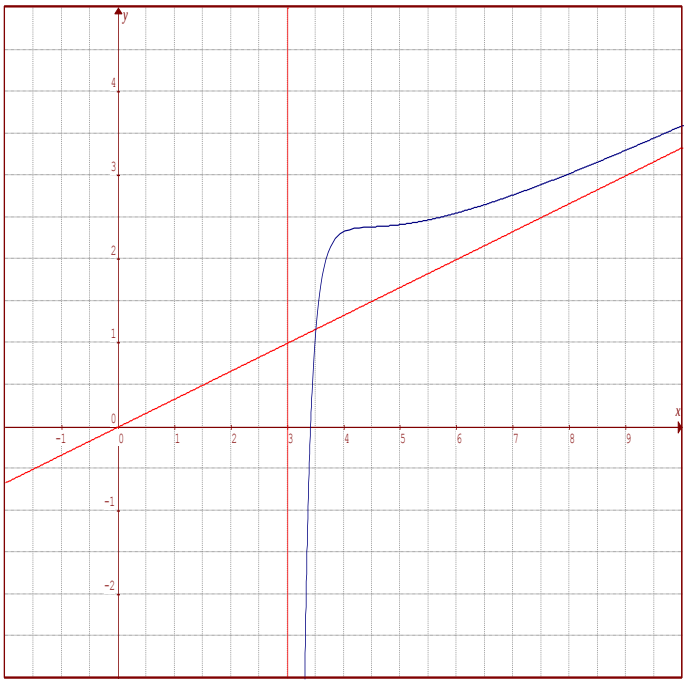
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	0

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=1$ ؟ .برّر الجواب.

التمرين (12)

أذكر الحرف الموافق للإجابة الصحيحة مع التبرير.

f دالة معرفة على $]3;+\infty[$ و C_f منحناها البياني التالي.



أ) C_f يقبل مقارب أفقي معادلته $y=3$.

ب) C_f يقبل مقارب عمودي معادلته $x=3$.

ج) C_f يقبل مقارب مائل معادلته $y=\dfrac{1}{3}x$.

د) C_f يقبل مقارب مائل معادلته $y=-2x+4$.

هـ) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$.

و) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x)=-\infty$.

ي) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$.

ل) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

التمرين (13)

f الدالة المعرفة على $[-4;1]$ بـ: $f(x)=x^3+6x^2+9x+3$

1) بين أن جدول تغيرات f هو التالي مبررا إجابتك

x	-4		-3		-1		1
f	-1	↗	3	↘	-1	↗	19

2) عين عدد حلول المعادلة $f(x)=2$ مبررا إجابتك .

3)

أ) بين أن المعادلة $f(x)=4$ تقبل حلا وحيدا α على $[-1;4]$

ب) عين حصرا لـ: α بين عددين طبيعيين متتاليين مبررا إجابتك

ج) عين حصرا لـ: α سعته 10^{-2} ثم أوجد قيمة مقربة بالزيادة لـ: α إلى 10^{-2}.

التمرين (14)

f دالة معرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بجدول تغيراتها التالي

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

ضع دائرة حول الحرف الموافق للإجابة أو الإجابات الصحيحة

1) المعادلة $f(x)=2$

أ	ب	جـ	د	هـ
لا تقبل أي حل	تقبل حلا وحيدا	تقبل حلين فقط	تقبل 3 حلول	تقبل أكثر من 3 حلول

2) من أجل كل $a\in IR$ المعادلة $f(x)=a$

أ	ب	جـ
لا تقبل أي حل	تقبل حلا على الأقل	تقبل حلا وحيدا

3) من أجل كل $a\in]-\infty;0[$ المعادلة $f(x)=a$

أ	ب	جـ
لا تقبل أي حل	تقبل حلا على الأقل	تقبل حلا وحيدا

4) منحنى الدالة f

أ	ب	جـ
لا تقبل أي مقارب أفقي	يقبل مقارب افقي وحيد	يقبل مقاربين افقيين

5) المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا على الأقل

أ	ب	جـ
صحيح	خطأ	لا يمكن الاستنتاج

6) من أجل كل $x\in]3;+\infty[$

أ	ب	جـ
$f'(x)\le 0$	$f'(x)\ge 0$	لا يمكن الاستنتاج

التمرين (15)

f الدالة المعرفة على IR بـ: $f(x)=x^4+x^3-x+1$

1) بين أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]0;1[$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على IR. (أنشئ جدول تغيرات f)

2) بين أن $0\prec f(\alpha)\prec 3$ ثم استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ ليس لها حل في IR .

التمرين (16)

1) f الدالة المعرفة على $I=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$ بـ: $f(x)=\cos x-2x+1$

أ) أحسب $f'(x)$ ثم بين أن $f'(x)\prec 0$ لكل $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$

2) بين أن المعادلة: $\cos x-2x+1=0$ تقبل حلا وحيدا α على I

التمرين (17)

f الدالة المعرفة على IR بـ:
$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+9}; x\le 0 \\ f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+4}-2}; x\succ 0 \end{cases}$$

1)

أ. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

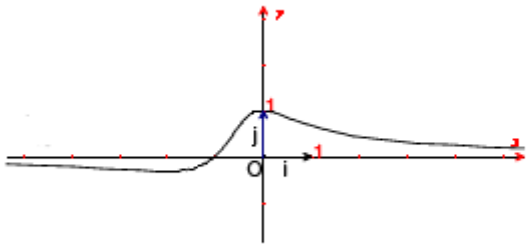
ب. بين أن: $\dfrac{-1}{\sqrt{x+4}-2}\le f(x)\le\dfrac{1}{\sqrt{x+4}-2}$ لكل $x\succ 0$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) نضع: $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ لكل $x\succ 0$

أ. أحسب $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

ب. استنتج $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3) h الدالة المعرفة على IR بمنحناها البياني التالي

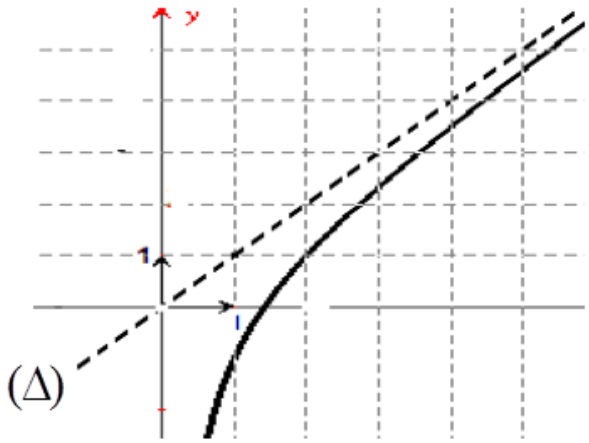


أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to-\infty}(h\circ f)(x);\ \lim_{x\to-\infty}(f\circ h)(x);\ \lim_{x\to+\infty}(h\circ f)(x)$$

التمرين (18)

f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ و C_f منحناها البياني في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس (الشكل أدناه) (Δ) مقارب للمنحنى C_f في جوار $+\infty$.



1) عين معادلة المستقيم (Δ)

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

3) استنتج $\lim\limits_{x\to 0^+} xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$

تمارين هامة (1) مبرهنة القيم المتوسطة

التمرين(1)

f الدالة المعرفة على $[1;3]$ بـ: $f(x)=x^3-5x^2+3x+4$

1) احسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

2) ادرس وجود وعدد حلول المعادلة $f(x)=a$ في الحالات التالية ثم فسر النتائج هندسيا.

أ) $a=0$ ، ب) $a=3$ ، ج) $a=5$

التمرين(2)

1) بين أن المعادلة $x^3+5x=2$ تقبل حلا على الأقل α في المجال $[0;1]$

2) ادرس وحدانية الحل α

3) أوجد حصرا لـ: α سعته 10^{-2}

التمرين(3)

f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}+2x-4$.

1) ادرس تغيرات f دون استعمال المشتقة

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$ يطلب ايجاد حصر له سعته 10^{-3}

3) حل المعادلة $\sqrt{x}+2x-4=0$ ثم تحقق من صحة الحصر الموجود بالسؤال 2.

التمرين(4)

g دالة معرفة على IR بـ: $g(x)=2x^3+x-2$

1) ادرس اتجاه تغيرات g على IR .

2) بين أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على IR ثم أوجد حصرا لـ: α سعته 10^{-2} .

3) عين إشارة $g(x)$ على IR .

4) استنتج اتجاه تغيرات الدالة f المعرفة على IR بـ:

$$f(x)=\sqrt{x^4+(x-2)^2}$$

التمرين(5)

الجزء الاول

g دالة معرفة على IR بـ: $g(x)=4x^3-3x-8$

1) ادرس اتجاه تغيرات g على IR .

2) بين أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على IR ثم أوجد قيمة مقربة إلى 10^{-2} بالزيادة لـ: α

3) عين إشارة $g(x)$ على IR .

الجزء الثاني

f دالة معرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\frac{x^3+1}{4x^2-1}$

1) أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا.

2) ادرس اتجاه تغيرات f على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

بين أن $f(\alpha)=\frac{3}{8}\alpha$ على IR ثم استنتج حصرا لـ: $f(\alpha)$

التمرين(6)

f الدالة المعرفة على IR بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1-\cos(\pi x)}{x}; x\prec 0 \\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x; x\geq 0 \end{cases}$$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) بين أن: $\frac{x+2}{x}\leq f(x)\leq 1$ واستنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) بين أن f مستمرة على IR .

4)

أ) بين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$.

ب) استنتج أن: $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{-\alpha^2-2\alpha}$

إرشادات وحلول جزئية تمارين هامة

(1) مبرهنة القيم المتوسطة

التمرين(1)

f الدالة المعرفة على $[1;3]$ بـ: $f(x)=x^3-5x^2+3x+4$

1)

x	1		3
$f'(x)$		-	
$f(x)$	3	↘	-5

2)

أ) $f(x)=0$ حل وحيد.

ب) $f(x)=3$ حل وحيد.

ج) $f(x)=5$ ليس لها حل.

التمرين(2)

1) $x^3+5x=2$ تكافئ $x^3+5x-2=0$ نضع $f(x)=x^3+5x-2$ ونستعمل مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[0;1]$

2) ندرس رتابة f على المجال $[0;1]$

3) ننصف المجال $[0;1]$ نجد $\alpha\in[0;0.5]$ ثم ننصف المجال $[0;0.5]$ نجد $\alpha\in[0.25;0.5]$ ثم ننصف المجال $[0.25;0.5]$ نجد $\alpha\in[0.375;0.5]$ وبما أن السعة المطلوبة هي: 0.01 فإنه بحساب $f(0.37);\ f(0.38);\ f(0.39).....$ نجد $f(0.38)\times f(0.39)\prec 0$ ومنه $\alpha\in[0.38;0.39]$

التمرين(3)

f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}+2x-4$.

1) f متزايدة على $[0;+\infty[$ (مجموع دالتين متزايدتين)

2) f مستمرة على $[0;+\infty[$ (مجموع دالتين مستمرتين) و $f(0)=-4$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ وللمعادلة $f(x)=0$ حلا على الاقل في المجال $[0;+\infty[$

من جهة أخرى f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ أي أن f رتيبة تماما على المجال $[0;+\infty[$ والحل وحيد.

$f(1)\times f(2)=-\sqrt{2}\prec 0$ أي أن: $\alpha\in[1;2]$ نتبع طريقة التنصيف المتبعة في التمرين (2) نجد $\alpha\in[1.375;1.4375]$ بحساب $f(1.437)$ نجد $\alpha\in[1.375;1.437]$ ثم ننصف المجال $[1.375;1.437]$ نجد $\alpha\in[1.406;1.437]$ بالتنصيف نجد $\alpha\in[1.406;1.4215]$ بحساب $f(1.421)$ نجد $\alpha\in[1.406;1.421]$ نواصل التنصيف والحساب نجد $\alpha\in[1.406;1.407]$

3) نضع $\sqrt{x}=a$ نجد $\sqrt{x}+2x-4=0$ تكافئ $2a^2+a-4=0$ معادلة تقبل حلين أحدهما سالب مرفوض (لأن: $a=\sqrt{x}\geq 0$) والاخر $a=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$ ومنه: $x=a^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}\right)^2\approx 1.4069$ أي أن: $x\in[1.406;1.407]$.

التمرين(4)

1) g متزايدة تماما على IR .

2) $\alpha\in[0.83;0.84]$

3)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

4) $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{x^4+(x-2)^2}}$ ومنه f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$

التمرين(5)

الجزء الاول

1)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\searrow$	-9	$\searrow$	$+\infty$
		-7	$\nearrow$		

2) نلاحظ حسب جدول تغيرات g أن g تغير إشارتها مرة واحدة في المجال $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ ومنه للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α على IR باستعمال طريقة التنصيف والحساب نجد $\alpha\in[1.45;1.46]$

3)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

الجزء الثاني

f دالة معرفة على $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+1}{4x^2-1}$

1) إمكانية وجود مقارب مائل لمنحنى f في جوار $+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ منحنى f يقبل مقارب عمودي معادلته $x=\dfrac{1}{2}$ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=+\infty$

2)

$f'(x)=\frac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}$ وإشارته من إشارة $g(x)$ لأن: $x\succ 0$ و

$(4x^2-1)^2\succ 0$ ومنه f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$

$$f(\alpha)-\frac{3}{8}\alpha=\frac{-3\alpha^3+3\alpha+8}{4\alpha^2-1}=\frac{-(3\alpha^3-3\alpha-8)}{4\alpha^2-1}=\frac{-g(\alpha)}{4\alpha^2-1}=0$$

لان $g(\alpha)=0$

وبما أن $\alpha\in[1.45;1.46]$ فإن $1.45\le\alpha\le 1.46$ ومنه

$1.45(\frac{3}{8})\le\frac{3}{8}\alpha\le 1.46(\frac{3}{8})$ أي $0.54375\le f(\alpha)\le 0.5475$

التمرين(6)

f الدالة المعرفة على IR بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1-\cos(\pi x)}{x};x\prec 0 \\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x;x\ge 0 \end{cases}$$

1)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$

(استعمل المرافق وإخراج العامل المشترك)

2) $-1\le\cos\pi x\le 1$ إذن $-1\le-\cos\pi x\le 1$ ومنه

$x\le x+1-\cos\pi x\le x+2$ وبالقسمة على x نجد:

$\frac{x+2}{x}\le f(x)\le 1$ (لان $x\prec 0$). إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ (النهاية بالمقارنة)

3) f مستمرة على $]-\infty;0]$ (مجموع وحاصل قسمة دوال مستمرة)

ومستمرة على $[0;+\infty[$ (مجموع ومركب دوال مستمرة)

وبالتالي f مستمرة على IR^*

ندرس استمرار f عند 0.

نحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x+1-\cos(\pi x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+\frac{1-\cos(\pi x)}{x})$

$\frac{1-\cos(\pi x)}{x}=-\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ حيث $g(x)=\cos\pi x;g(0)=1$

وبما أن g قابلة للاشتقاق عند 0 فإن

$g'(x)=-\pi\sin\pi x$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=0$ وبالتالي

نستنتج $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1=f(0)$ أي f مستمرة على يسار 0

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{x^2+x+1}-x=1=f(0)$ أي f مستمرة على يمين 0

f مستمرة على يمين ويسار 0 فهي مستمرة عند 0

نتيجة: f مستمرة على IR^* ومستمرة عند 0 فهي مستمرة على IR

4)

أ) f مستمرة على $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ و: $f(-\frac{1}{2})\times f(0)=-1$ ومنه

$f(x)=0$ تقبل حلا α على الأقل في المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$.

ب) $\cos^2(\pi\alpha)+\sin^2(\pi\alpha)=1$ إذن:

$\sin^2(\pi\alpha)=1-\cos^2(\pi\alpha)$ من جهة أخرى $f(\alpha)=0$ أي

$\frac{\alpha+1-\cos(\pi\alpha)}{\alpha}=0$

ومنه $\alpha+1-\cos(\pi\alpha)=0$ أو $\cos(\pi\alpha)=\alpha+1$

ومنه $\sin^2(\pi\alpha)=1-\cos^2(\pi\alpha)=1-(\alpha+1)^2=-\alpha^2-2\alpha$

$\sin(\pi\alpha)=\pm\sqrt{-\alpha^2-2\alpha}$

لدينا $\alpha\in\left]-\frac{1}{2};0\right[$ إذن: $-\frac{1}{2}\prec\alpha\prec 0$ و $-\frac{\pi}{2}\prec\pi\alpha\prec 0$ وبالتالي

$\sin(\pi\alpha)\prec 0$ (الربع الرابع) و $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{-\alpha^2-2\alpha}$

ملاحظة هامة: يجب إثبات أن $-\alpha^2-2\alpha\ge 0$ بحيث يكون

$\sqrt{-\alpha^2-2\alpha}$ معرفا وبدراسة إشارة $-\alpha^2-2\alpha$ نجد

$-\alpha^2-2\alpha\succ 0$ من أجل $\alpha\in\left]-\frac{1}{2};0\right[$